Drugi parcijalni iz Analize III, 21.01.2014.
ispit pisati isključivo hemijskom olovkom

1. Izračunati zapreminu tijela ograničenog površima $y^2 = x,\ y^2 = 4x,\ z = 0,\ x + z = 4,\ x = 0.$

2. Izračunati $I = \oint\limits_{x^2+y^2=R^2} e^{-(x^2-y^2)}(\cos 2xy\,\mathrm{d}x + \sin 2xy\,\mathrm{d}y).$

3. Izračunati površinu dijela cilindra $x^2 + y^2 = Rx$ koji se nalazi unutar sfere $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

4. Izračunati fluks vektora $\vec{v} = (x, -y^2, x^2 + z^2 - 1)$ iznutra površi elipsoida $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} + z^2 = 1.$

Drugi parcijalni iz Analize III, 21.01.2014.
ispit pisati isključivo hemijskom olovkom

1. Izračunati zapreminu tijela ograničenog površima $y^2 = x,\ y^2 = 4x,\ z = 0,\ x + z = 4,\ x = 0.$

2. Izračunati $I = \oint\limits_{x^2+y^2=R^2} e^{-(x^2-y^2)}(\cos 2xy\,\mathrm{d}x + \sin 2xy\,\mathrm{d}y).$

3. Izračunati površinu dijela cilindra $x^2 + y^2 = Rx$ koji se nalazi unutar sfere $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

4. Izračunati fluks vektora $\vec{v} = (x, -y^2, x^2 + z^2 - 1)$ iznutra površi elipsoida $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} + z^2 = 1.$

Drugi parcijalni iz Analize III, 21.01.2014.
ispit pisati isključivo hemijskom olovkom

1. Izračunati zapreminu tijela ograničenog površima $y^2 = x,\ y^2 = 4x,\ z = 0,\ x + z = 4,\ x = 0.$

2. Izračunati $I = \oint\limits_{x^2+y^2=R^2} e^{-(x^2-y^2)}(\cos 2xy\,\mathrm{d}x + \sin 2xy\,\mathrm{d}y).$

3. Izračunati površinu dijela cilindra $x^2 + y^2 = Rx$ koji se nalazi unutar sfere $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

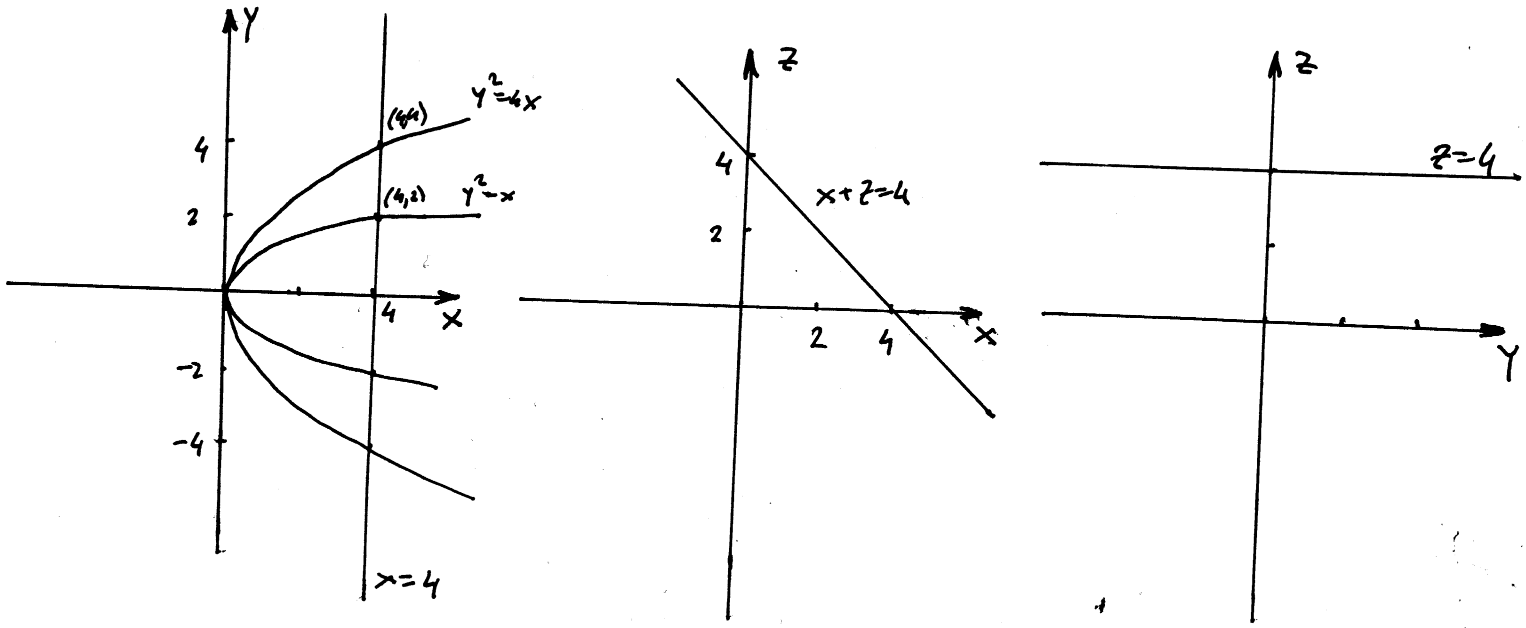
4. Izračunati fluks vektora $\vec{v} = (x, -y^2, x^2 + z^2 - 1)$ iznutra površi elipsoida $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} + z^2 = 1.$

Zadaci su skinuti sa stranice pf.unze.ba/nabokov.
Za uočene greške pisati na *infoarrt@gmail.com*

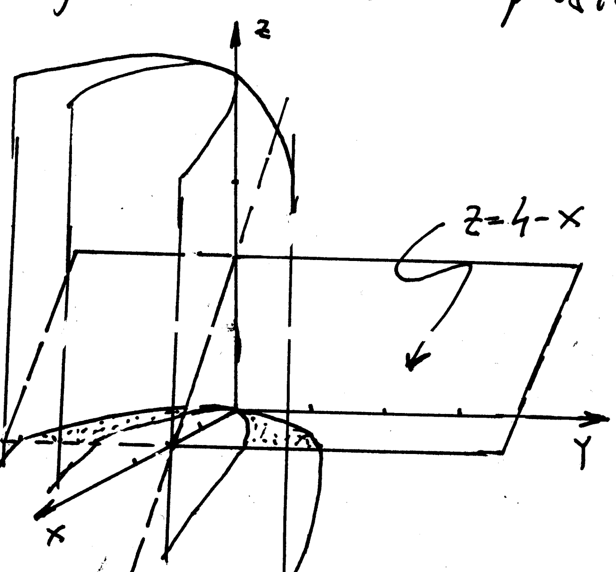
Izračunati zapreminu tijela ograničenog površima

$$y^2=x,\quad y^2=4x,\quad z=0,\quad x+z=4.$$

Rj: Napravimo presjeke datih linija sa tri koordinatne ravni



Tijelo skicirano u prostoru



Tijelo je odozgo ograničeno sa ravni $z=4-x$.
Primijetimo da tijelo možemo podijeliti na dva jednaka dijela. Pa neka je

$$D:\begin{cases} 0\le x\le 4 \\ \sqrt{x}\le y\le 2\sqrt{x}\end{cases}$$

$$V=2\iint_D (4-x)\,dx\,dy=2\int_0^4 dx\int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}(4-x)\,dy=2\int_0^4\sqrt{x}(4-x)\,dx=\ldots=\frac{256}{15}$$ tražena zapremina

Pitanje: Zašto za D nismo mogli uzeti npr. $D:\begin{cases}-4\le y\le 4\\ y^2\le x\le \frac{1}{4}y^2\end{cases}$?

(#) Izračunati $$I = \oint\limits_{x^2+y^2=R^2} e^{-(x^2-y^2)}(\cos 2xy\, dx + \sin 2xy\, dy).$$

Rj.

$x^2+y^2=R^2$ je krug sa centrom u koordinatnom početku poluprečnika R.

Kako je data kriva zatvorena, to možemo upotrebiti formulu Greena

$$\int\limits_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

$$Q(x,y) = e^{-(x^2-y^2)} \sin 2xy \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = e^{-(x^2-y^2)} \cdot (-2x) \sin 2xy + e^{-(x^2-y^2)} \cdot 2y \cdot \cos 2xy =$$
$$= -2x\, e^{-(x^2-y^2)} \sin 2xy + 2y\, e^{-(x^2-y^2)} \cos 2xy \quad \ldots (1)$$

$$P(x,y) = e^{-(x^2-y^2)} \cos 2xy \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 2y\, e^{-(x^2-y^2)} \cos 2xy + e^{-(x^2-y^2)} 2x \cdot (-\sin 2xy)$$
$$= -2x\, e^{-(x^2-y^2)} \sin 2xy + 2y\, e^{-(x^2-y^2)} \cos 2xy \quad \ldots (2)$$

(1) i (2) $\Rightarrow \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0 \Rightarrow I = 0$ traženo rješenje

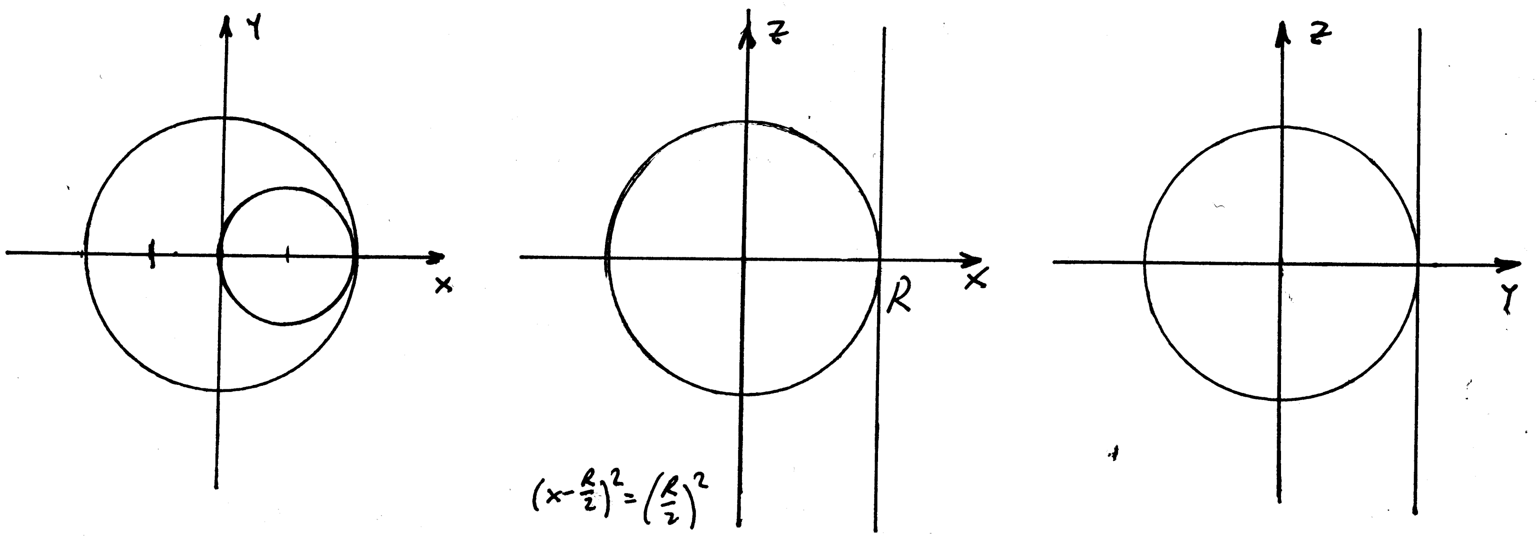
Izračunati površinu dijela cilindra $x^2+y^2=Rx$ koji se nalazi unutar sfere $x^2+y^2+z^2=R^2$.

Rj.

$$P=\iint_S dS=\iint_D \sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dx\,dy$$

$$x^2+y^2=Rx$$
$$x^2-2\cdot x\cdot \frac{R}{2}+\left(\frac{R}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{R}{2}\right)^2$$
$$\left(x-\frac{R}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{R}{2}\right)^2$$

Napravimo presjeke datih figura sa tri koordinatne ravni.



$$\left(x-\frac{R}{2}\right)^2=\left(\frac{R}{2}\right)^2$$
$$x-\frac{R}{2}=\pm\frac{R}{2}$$

Primjetimo da površinu možemo podijeliti na 4 jednaka dijela (ispod i iznad xOy ravni...) i da pravimo projekciju npr. na xOz ravan. (u prvom oktantu)

$$D: \begin{cases} 0\le x\le R \\ 0\le z\le \sqrt{R^2-Rx} \end{cases}$$

$$x^2+y^2=Rx$$
$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

Ako se iz ove dvije jednačine na neki način riješimo y-na kao rezultat ćemo dobiti ortogonalnu projekciju njihovog presjeka na xOz ravan

$$y^2=Rx-x^2$$
$$y^2=R^2-x^2-z^2 \Rightarrow Rx-x^2=R^2-x^2-z^2$$
$$z^2=R^2-Rx$$

Kako tražimo površinu cilindra $x^2+y^2=Rx$ to imamo

$$y=\sqrt{Rx-x^2} \Rightarrow y_x'=\frac{R-2x}{2\sqrt{Rx-x^2}},\quad y_z'=0,$$

$$1+y_z'^2+y_x'^2=1+\frac{(R-2x)^2}{4(Rx-x^2)}=\frac{4Rx-\cancel{4x^2}+R^2-4Rx+\cancel{4x^2}}{4(Rx-x^2)}=\frac{R^2}{4(Rx-x^2)}$$

Prema tome

$$P = 2R \iint_D \frac{dx\,dz}{\sqrt{Rx - x^2}} = 2R \int_0^R \frac{dx}{\sqrt{Rx - x^2}} \int_0^{\sqrt{R^2 - Rx}} dz =$$

$$= 2R \int_0^R \frac{\sqrt{R^2 - Rx}}{\sqrt{Rx - x^2}}\,dx = 2R \int_0^R \frac{\sqrt{R}\,\sqrt{R-x}}{\sqrt{x}\,\sqrt{R-x}}\,dx =$$

$$= 2R\sqrt{R} \int_0^R \frac{dx}{\sqrt{x}} = \dots = 4R^2$$ tražena površina

Primjedba:

Primjetimo da smo površinu mogli odrediti i primjenom krivolinijskog integrala prve vrste

$$P = 4 \int_C \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,ds \qquad C: \begin{cases} x = R\cos^2\varphi \\ y = R\sin\varphi\cos\varphi \\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2} = \dots = R$$

(#) Izračunati fluks vektora $\vec{v} = (x, -y^2, x^2 + z^2 - 1)$ iznutra površi elipsoida $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$.

Rj.

Fluks vektorskog polja se računa po formuli

$$\Phi = \iint_S \vec{v}\,\vec{n}\, dS = \iint_S (v_x \cos\alpha + v_y \cos\beta + v_z \cos\gamma)\, dS$$

$$= \iint_S v_x\, dy\, dz + v_y\, dx\, dz + v_z\, dx\, dy$$

U našem slučaju trebamo izračunati

$$\Phi = \iint_S x\, dy\, dz - y^2 dx\, dz + (x^2 - z^2 - 1)\, dx\, dy$$

Kako nam je S zatvorena površ to možemo upotrebiti formulu Gauss-Ostrogradski

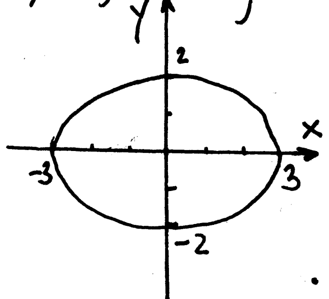
$$\iint_S v_x\, dy\, dz + v_y\, dx\, dz + v_z\, dx\, dy = \iiint_\Omega \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz$$

gdje je Ω unutrašnjost datog elipsoida.

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial v_y}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial v_z}{\partial z} = 2z$$

$$\Phi = \iiint_\Omega (1 - 2y + 2z)\, dx\, dy\, dz =$$

presjek datog elipsoida sa xOy ravni



uvodimo pooopštene sferne koordinate

$x = 3\rho \sin\varphi \cos\theta$

$y = 2\rho \sin\varphi \sin\theta$

$z = \rho \cos\varphi$

$dx\, dy\, dz = \rho^2 \sin\varphi\, 6\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$

$\overset{(*)}{=}$

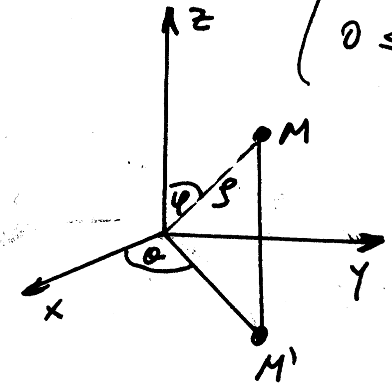
$x = 3\rho \sin\varphi \cos\theta$

$y = 2\rho \sin\varphi \sin\theta$

$z = \rho \cos\varphi$

$dx\,dy\,dz = 6\rho^2 \sin\varphi \, d\rho\, d\varphi\, d\theta$

$$\Omega \xrightarrow{\text{transformiše}} \Omega' : \begin{cases} 0 \le \rho \le 1 \\ 0 \le \varphi \le \pi \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$



ZAŠTO $6\rho^2 \sin\varphi$?

Ako su ρ, φ i θ nove promjenjive i

$x = \alpha(\rho, \varphi, \theta)$

$y = \beta(\rho, \varphi, \theta)$

$z = \gamma(\rho, \varphi, \theta)$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix}$$

Ako je $x = a\rho \sin\varphi \cos\theta$, $y = b\rho \sin\varphi \sin\theta$, $z = c\rho \cos\varphi$ tada je $dx\,dy\,dz = |J|\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$ gdje je

$$J = \begin{vmatrix} a \sin\varphi \cos\theta & a\rho \cos\varphi \cos\theta & -a\rho \sin\varphi \sin\theta \\ b \sin\varphi \sin\theta & b\rho \cos\varphi \sin\theta & b\rho \sin\varphi \cos\theta \\ c \cos\varphi & -c\rho \sin\varphi & 0 \end{vmatrix} = \ldots = \rho^2 abc \sin\varphi$$

a) $$\iiint\limits_{\Omega'} (1 - 4\rho \sin\varphi \sin\theta + 2\rho \cos\varphi)\, 6\rho^2 \sin\varphi \, d\rho\, d\varphi\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{1} (6\rho^2 \sin\varphi - 24\rho^3 \sin^2\varphi \sin\theta + 12\rho^3 \sin\varphi \cos\varphi)\, d\rho =$$

$$= \ldots = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \left(2\sin\varphi - 6 \sin^2\varphi \sin\theta + \frac{3}{2} \sin 2\varphi\right) d\varphi = \ldots = \int_0^{2\pi} (4 - 3\pi \sin\theta)\, d\theta = 8\pi$$

traženo rješenje